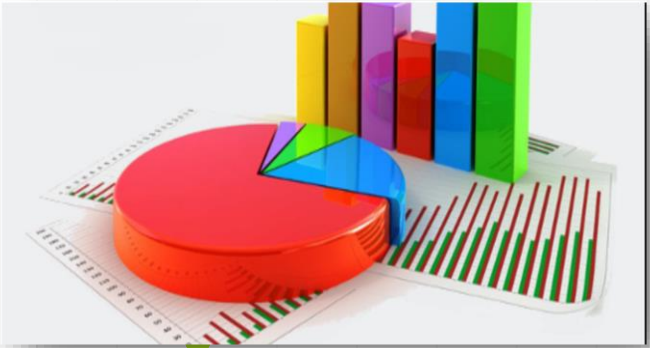
Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

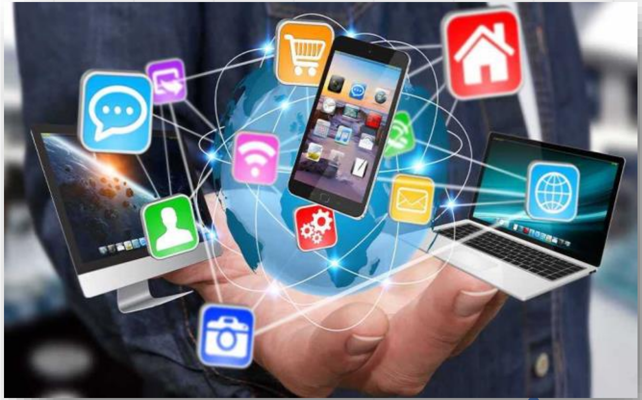
Licenciatura em Economia
2.º Ano/2.º Semestre
2023/2024

Aulas Teóricas N.os 10 e 11 (Semana 6)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao



https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)
• **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Distribuições Teóricas • **Capítulo 6**: Amostragem. Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

Aula 9	Coeficiente de assimetria e coeficiente de kurtosis. Exemplo. Quantil de ordem alfa para distribuições contínuas. Mediana como medida de localização, amplitude inter-quartis como medida de dispersão. Exemplo.
Aula 10	**Início do capítulo 3:** Variáveis aleatórias bidimensionais. Função de distribuição conjunta, propriedades. Funções de distribuição marginais. Independência de variáveis aleatórias. Variáveis aleatórias bidimensionais discretas. Função probabilidade conjunta.
	Propriedades. Função probabilidade marginal. Exemplo.
Aula 11	Variáveis bidimensionais discretas: independência. Variáveis bidimensionais contínuas: função densidade conjunta e funções densidade marginais. Independência. Função probabilidade condicionada. Propriedades. Exemplo.
Aula 12	Função densidade. Função densidade de probabilidade condicionada. Propriedades. Exemplo.

1

Pares Aleatórios Discretos

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais;
Independência; Covariância e Correlação

Par Aleatório Discreto

PAR ALEATÓRIO

A um vector aleatório de dimensão 2 chamamos um **par aleatório ou variável aleatória bidimensional**.

Par aleatório discreto:

Um par aleatório diz-se discreto quando ambas as componentes são v.a.'s discretas. Assim (X,Y) é um par aleatório discreto quando os domínios de existência das v.a.'s X e Y são conjuntos finitos ou infinitos numeráveis.

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Função de Probabilidade Conjunta

A função de probabilidade conjunta do par aleatório (X,Y) é uma função f(x,y) que associa a cada elemento de $\mathbb{R}^2$ uma probabilidade,

$$f(x,y) = p_{ij} = P[X = x, Y = y].$$

Verifica as seguintes propriedades:

1. $0 \leq f(x,y) \leq 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
2. $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$.

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Função de Probabilidade Conjunta: Exemplo

Exemplo 6. Uma moeda equilibrada tem o algarismo 1 desenhado numa das faces e o algarismo 2 desenhado na outra face. A moeda é lançada ao ar duas vezes. Seja a v.a. X – soma dos dois números observados nos lançamentos e a v.a. Y – diferença dos mesmos números (o primeiro menos o segundo).

$$\begin{array}{rcccc} \Omega = \{ & (1,1), & (1,2), & (2,1), & (2,2)\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (X,Y) = & (2,0) & (3,-1) & (3,1) & (4,0) \end{array}$$

Assim temos :

P[X = 2,Y = 0] = ¼; P[X = 3,Y = -1] = ¼;

P[X = 3,Y = 1] = ¼; P[X = 4,Y = 0] = ¼.

A função de probabilidade conjunta, por vezes é representada através de um quadro.

Para o exemplo 6 a função de probabilidade conjunta de (X,Y) vem:

X \ Y	-1	0	1
2	0	1/4	0
3	1/4	0	1/4
4	0	1/4	0

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Funções de Probabilidade Marginais

Apesar de no par aleatório se proceder ao estudo em conjunto de duas variáveis aleatórias, isso não impede que se possa estudar probabilisticamente cada variável componente em separado. De facto é possível obter as funções de probabilidade das variáveis X eY, individualmente, e a que damos o nome de funções de probabilidade marginais:

Função de probabilidade marginal de X,

$$f_X(x) = P[X = x, -\infty < Y < +\infty] = \sum_y f(x,y)$$

Função de probabilidade marginal de Y

$$f_Y(y) = P[-\infty < X < +\infty, Y = y] = \sum_x f(x,y)$$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Funções de Probabilidade Marginais: Exemplo

Exemplo 7 (continuação)

Podemos calcular as probabilidades marginais, isto é, calcular a função de probabilidade de X eY usando a função de probabilidade conjunta.

Assim,

$$P[X=2] = P[(\{X=2\}\cap\{Y=-1\})\cup(\{X=2\}\cap\{Y=0\})\cup(\{X=2\}\cap\{Y=1\})] =$$
$$= P[X=2,Y=-1] + P[X=2,Y=0] + P[X=2,Y=1] = ¼,$$

$$P[X=3] = P[(\{X=3\}\cap\{Y=-1\})\cup(\{X=3\}\cap\{Y=0\})\cup(\{X=3\}\cap\{Y=1\})] =$$
$$= P[X=3,Y=-1] + P[X=3,Y=0] + P[X=3,Y=1] = ½,$$

$$P[X=4] = P[(\{X=4\}\cap\{Y=-1\})\cup(\{X=4\}\cap\{Y=0\})\cup(\{X=4\}\cap\{Y=1\})] =$$
$$= P[X=4,Y=-1] + P[X=4,Y=0] + P[X=4,Y=1] = ¼,$$

Pelo que, a função de probabilidade marginal de X é,

$$X = \begin{cases} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

X \ Y	-1	0	1	
2	0	1/4	0	1/4
3	1/4	0	1/4	1/2
4	0	1/4	0	1/4
	1/4	1/2	1/4	1

função de probabilidade marginal de X (soma de linha)

função de probabilidade marginal de Y (soma de coluna)

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Funções de Probabilidade Marginais: Exemplo

X \ Y	-1	0	1	
2	0	1/4	0	1/4
3	1/4	0	1/4	1/2
4	0	1/4	0	1/4
	1/4	1/2	1/4	1

função de probabilidade marginal de X

(soma de linha)

função de probabilidade marginal de Y

(soma de coluna)

Da mesma forma obtemos,

P[Y = -1] = ¼, P[Y = 0] = ½ e P[Y = 1] = ¼,

A função de probabilidade marginal de Y será,

$$Y = \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

O quadro da distribuição de probabilidade conjunta de (X,Y) pode agora ser completado com mais uma linha e uma coluna para as probabilidades marginais das v.a.'s X e Y.

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Funções de Probabilidade Condicionais

Sabemos que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \; P(A) > 0$$

Definindo:

$A \rightarrow$ o evento onde $X = x$

$B \rightarrow$ o evento onde $Y = y$

A distribuição de probabilidade de X isolado e Y isolados são:

$$g(x) = \sum_{y} f(x,y) \quad \text{e} \quad h(y) = \sum_{x} f(x,y) \quad \text{variável discreta}$$

Temos que:

$$P(Y = y / X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) > 0$$

ou ainda

$$P(X = x / Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) > 0$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Funções de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a função de probabilidade conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a função de probabilidade condicional de X dado que Y=1 e considere esse resultado para calcular P(X=0|Y=1).

		X			
f(x, y)		0	1	2	
y	0	3/28	9/28	3/28	15/28
	1	6/28	6/28	-	12/28
	2	1/28	-	-	1/28
		10/28	15/28	3/28	1

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

$$P(X=0) = g(0) = \sum_{y=0}^{2} f(0,y) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = 10/28$$

$$P(X=1) = g(1) = \sum_{y=0}^{2} f(1,y) = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) = 15/28$$

$$P(X=2) = g(2) = \sum^{2} f(2,y) = f(2,0) = 3/28$$

Função massa de probabilidade de X:

x	0	1	2
g(x)	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

= distribuição de probabilidade marginal de X.

Funções de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a função de probabilidade conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a função de probabilidade condicional de X dado que Y=1 e considere esse resultado para calcular P(X=0|Y=1).

		X			
f(x, y)		0	1	2	
y	0	3/28	9/28	3/28	15/28
	1	6/28	6/28	-	12/28
	2	1/28	-	-	1/28
		10/28	15/28	3/28	1

Mas usando a definição:

$$P(X = x / Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f(x,y)}{h(y)},$$

por definição: $h(y) = \sum_{x} f(x,y)$

$$P(x = 0/y = 1) = \frac{6/28}{12/28} = \frac{1}{2}$$

$$P(x = 1/y = 1) = \frac{6/28}{12/28} = \frac{1}{2}$$

$$P(x = 2/y = 1) = \frac{0}{12/28} = 0$$

Independência entre as Variáveis Aleatórias

Dada uma v.a. bidimensional (X,Y), as v.a. unidimensionais que a integram, X e Y, dizem-se independentes se

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \forall\ (x,y).$$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Independência Estatística

(Dedução com analogia Teoria das Probabilidades)

Sabemos que:

$$P\,(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow f(x/y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$$

Mas se A e B forem independentes:

$$P\,(A/B) = P(A) \Rightarrow f(x/y) = g(x)$$

Assim,

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B) \Rightarrow f(x,y) = g(x).h(y)$$

Sejam x e y duas variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) com distribuição de probabilidade conjunta f (x, y) e distribuição de probabilidade marginais g(x) e h(y), respectivamente. As variáveis aleatórias x e y são consideradas Estatisticamente Independentes se e somente se:

$$f\,(x, y) = g(x)\,.\,h(y)$$

para todos (x, y) dependendo do intervalo).

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Independência Estatística

Generalização

Seja $X_1, X_2, \ldots X_n$, n variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) com distribuição de probabilidade conjunta $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ e distribuição de probabilidade marginais $f_1(x_1), f_2(x_2) \ldots f_3(x_n)$, respectivamente. As variáveis aleatórias, $X_1, X_2, \ldots X_n$, são ditas Estatisticamente Independentes se e somente se:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = f_1(x_1) \,.\, f_2(x_2) \ldots f_3(x_n)$$

Independência Estatística: Exemplo

Mostre que as variáveis aleatórias do exemplo ① não são estatisticamente independentes.

$$f\,(x, y) \overset{?}{=} g(x)\,.\,h(x)$$

		X			
f(x, y)		0	1	2	
y	0	3/28	9/28	3/28	15/28
	1	6/28	6/28	-	12/28
	2	1/28	-	-	1/28
		10/28	15/28	3/28	1

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Vamos verificar em um par (x, y)

Suponha (0, 0)

f (x, y) = f (0, 0) = 3/28

g (0) = 10/28

h (0) = 15/28

<u>Vemos que:</u>

$$\frac{3}{28} \neq \frac{10}{28} \cdot \frac{15}{28}$$

não são estatisticamente independentes.

Valor Médio do Par Aleatório

Valor esperado:

Seja X uma variável aleatória. O **valor esperado**, **média** ou **esperança matemática** de X, que denotamos por E[X] (também representado por μ_X ou μ), quando existe, define-se por

$$E[X] = \sum_i x_i f(x_i) \qquad \text{se X é uma variável aleatória discreta,}$$

Propriedades do valor esperado:

Dadas X e Y duas variáveis aleatórias, e seja k uma constante real,

- $E[k] = k$;
- $E[kX] = k\,E[X]$;
- $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$;
- $E[XY] = E[X] \,.\, E[Y] + Cov[X,Y]$

  Se X e Y forem independentes então $E[XY] = E[X] \,.\, E[Y]$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Variância do Par Aleatório

Variância:

Seja X uma variável aleatória. A variância de X, que denotamos por Var[X] (também representada por σ_X^2 ou simplesmente σ²), é definida por:

$$Var[X] = E[(X - \mu_X)^2],$$

ou seja,

$$Var[X] = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot f(x_i) \quad \text{se X é uma v.a. discreta,}$$

Propriedades da variância:

Dadas X e Y duas variáveis aleatórias, e seja k uma constante real,

- $Var[k] = 0;$
- $Var[kX] = k^2\,Var[X];$
- $Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y] \pm 2Cov[X,Y];$

  Se X e Y forem independentes então $Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y]$
- $Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$

  Onde,

$$E[X^2] = \sum_i x_i^2 f(x_i) \quad \text{se X é uma variável aleatória discreta,}$$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Covariância do Par Aleatório

Covariância:

A **covariância** entre X eY, representa-se por Cov(X,Y)ou simplesmente $\sigma_{X,Y}$, e define-se como

$$Cov[X, Y] = \sigma_{X,Y} = E[(X- \mu_X)(Y- \mu_Y)],$$

ou seja,

$$Cov[X,Y] = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)(x_j - \mu_Y) \cdot f(x_i, y_j) \quad \text{se (X,Y) é uma v.a. discreta,}$$

Uma outra fórmula para calcular a covariância é

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]\ E[Y].$$

onde

$$E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) \quad \text{se (X,Y) é uma v.a. discreta,}$$

Propriedades da Covariância:

Sejam X eY duas variáveis aleatórias e a, b, c e d constantes reais,

- X eY são variáveis independentes $\Rightarrow$Cov(X,Y) =0

  (Nota: O recíproca pode não ser verdadeiro. O facto de Cov(X,Y) =0 não implica a indepndência entre X eY, pode existir uma ligação não linear entre as variáveis.);
- Cov(X,X) = Var[X];
- Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y).

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Coeficiente de Correlação do Par Aleatório

- **Coeficiente de correlação:**

O **coeficiente de correlação** é definido como:

$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Propriedades do coeficiente de correlação:

Sejam X eY duas variáveis aleatórias e a, b, c e d constantes reais,

- $-1 < \rho_{X,Y} < 1$;
- Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $\rho_{X,Y} = 0$;
- O coeficiente de correlação não se altera quando as variáveis sofrem uma transformação linear positiva, ou seja,

$$\rho_{aX+b,cY+d} = \rho_{X,Y} \qquad \text{se } ac > 0.$$

Pares Aleatórios Discretos: Exercícios

2

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais; Independência; Covariância e Correlação

5.1 Uma loja de electrodomésticos vende televisores da marca X e da marca Y. A função de probabilidade conjunta do número de televisores vendidos diariamente é a seguinte:

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

(a) Calcule as funções de probabilidade marginais de X e de Y.

(b) Calcule a função de distribuição marginal de X.

(c) Calcule a probabilidade de que num dia a marca Y seja mais vendida do que a marca X.

(d) Determine o valor esperado e a variância do número total de televisores vendidos diariamente.

Exercício 5.1 (a): Funções de Probabilidade Marginais

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(y=x)$

$0.12+0.25+0.13=0.5$

$0.05+0.30+0.01=0.36$

$0.03+0.10+0.01=0.14$

$$f_X(x)=\begin{cases}0.2, & x=0\\ 0.65, & x=1\\ 0.15, & x=2\end{cases};$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0.5, & y=0\\ 0.36, & y=1\\ 0.14, & y=2\end{cases}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 5.1 (b): Função de Distribuição

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(y=x)$

$0.12+0.25+0.13=0.5$

$0.05+0.30+0.01=0,36$

$0.03+0.10+0.01=0.14$

$$f_X(x)=\begin{cases}0.2, & x=0\\ 0.65, & x=1\\ 0.15, & x=2\end{cases};$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0. & x<0\\ 0.2, & 0\le x<1\\ 0.85, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 5.1 (c): Função de Probabilidade

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(y=x)$

$0.12+0.25+0.13=0.5$

$0.05+0.30+0.01=0.36$

$0.03+0.10+0.01=0.14$

$\boxed{P(Y>X) = P(X=0,\ Y=1) + P(X=0,\ Y=2) + P(X=1,\ Y=2) = 0{,}05+0{,}03+0{,}1 = 0{,}18}$

Exercício 5.1 (d): Valor Médio e Variância da Soma

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(y=x)$

$0.12+0.25+0.13=0,5$

$0.05+0.30+0.01=0,36$

$0.03+0.10+0.01=0.14$

$$f_X(x)=\begin{cases}0.2, & x=0\\ 0.65, & x=1\\ 0.15, & x=2\end{cases};$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0.5, & y=0\\ 0.36, & y=1\\ 0.14, & y=2\end{cases}$$

Cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)

E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0,95 + 0,64 = 1,59

Slides Professora Claúdia Nunes

Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2× Cov(X,Y)
= (1,25 – 0,95^2) + (0,92 – 0,64^2) + 2×(0,56-0,95*0,64) = 0,7619

Pares Aleatórios: Função de Probabilidade Condicional

Considere-se a função de probabilidade conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a função de probabilidade condicional de X dado que Y=1.

Caracterização condicional

[Cap. 2: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$]

Tomando como "inspiração" esta fórmula, vamos definir probabilidades e momentos condicionados:

i) Prob. condicionada de X em Y

$$\boxed{P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}} \quad \forall x, y$$

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(Y=x)$

$0.12+0.25+0.13 = 0,5$

$0.05+0.30+0.01 = 0,36$

$0.03+0.10+0.01 = 0.14$

Exemplo:

$$P(X=x|Y=1) = \frac{P(X=x, Y=1)}{P(Y=1)} = \begin{cases} \frac{0.05}{0.36} & x=0 \\ \frac{0.30}{0.36} & x=1 \\ \frac{0.01}{0.36} & x=2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Pares Aleatórios: Função de Distribuição Condicional

$Y\backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(y = x)$

$0.12 + 0.25 + 0.13 = 0.5$

$0.05 + 0.30 + 0.01 = 0.36$

$0.03 + 0.10 + 0.01 = 0.14$

À custa desta probabilidade condicionada, podemos definir:

- Função de distribuição condicionada de x em y

Slides Professora Claúdia Nunes

Pares Aleatórios: Função de Distribuição Condicional

exemplo: $F_{X|Y=1}(x) = P(X \leq x | Y=1)$

$[\, F_X(x) = P(X \leq x) \,]$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{0.05}{0.36} & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{0.05+0.30}{0.36} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(X \leq 1.3 | Y=0) =$

$= \dfrac{P(X \leq 1.3, Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{0.12+0.25}{0.5}$

$P(X \leq 1.3 | Y=1) = F_{X|Y=1}(1.3) = \dfrac{0.05+0.30}{0.36}$

Slides Professora Claúdia Nunes

Pares Aleatórios: Valores Esperados Condicionais

Valores esperados condicionados

$$\boxed{E[X|Y=y] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x\,P(X=x|Y=y)}$$

Exemplo: $E[X|Y=1] = \sum_{x=0}^{2} x\,P(X=x|Y=1)$

Exemplo:

$$P(X=x|Y=1) = \frac{P(X=x, Y=1)}{P(Y=1)} = \begin{cases} \frac{0.05}{0.36} & x=0 \\ \frac{0.30}{0.36} & x=1 \\ \frac{0.01}{0.36} & x=2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= 0 \times \frac{0.05}{0.36} + 1 \times \frac{0.30}{0.36} + 2 \times \frac{0.01}{0.36}$$

Pares Aleatórios: Variâncias Condicionais

$$\boxed{E[X^2 | Y=y] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 P(X=x | Y=y)}$$

$$\boxed{E[g(X) | Y=y] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} g(x) P(X=x | Y=y)}$$

Em particular:

$$\boxed{Var[X | Y=y] = E[X^2 | Y=y] - E^2[X | Y=y]}$$

Nota: idênticas definições (devidamente adaptadas para o caso de Y condicionado em X)

Função de Distribuição Conjunta

Dada uma v.a. bidimensional (par aleatório) (X,Y), discreta, a função de distribuição conjunta de (X,Y) é definida da seguinte forma:

$$F(x,y) = P[X \le x, Y \le y] = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} f(x_i, y_j),$$

e satisfaz as seguintes condições:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$, com y fixo;
2. $\lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$, com x fixo;
3. $\lim_{x,y \to -\infty} F(x,y) = 0$;
4. $\lim_{x,y \to +\infty} F(x,y) = 1$;
5. $0 \le F(x,y) \le 1, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
6. $F(x_1,y_1) \le F(x_2,y_2), \ \forall x_1 < x_2, \ y_1 < y_2$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Função de Distribuição Conjunta

A partir da probabilidade conjunta podemos definir a função de distribuição conjunta:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

Exemplo:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$$F_{X,Y}(1,1) = P(X \le 1, Y \le 1)$$

$$= \sum_{x \le 1} \sum_{y \le 1} P(X = x, Y = y)$$

$$= 0.12 + 0.25 + 0.05 + 0.30$$

Em termos de propriedades, tem propriedades semelhantes à f. distribuição para uma v.a., tendo em conta que agora temos 2 v.a.

Nota: Tal como no caso univariado, Tb podemos calcular $F_{X,Y}(x,y)$ $\forall x, y$ [Temos vários

Slides Professora Claúdia Nunes

3

Pares Aleatórios Contínuos

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais; Independência; Covariância e Correlação

Função Densidade de Probabilidade Conjunta

A função $f(x, y)$ é uma função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias x e y se:

1. $f(x, y) \geq 0$ p/ todos (x, y)
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$
3. $P[(X, Y) \in A] = \int\int f(x, y)\, dx\, dy$ para qualquer região A no plano xy.

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Função Densidade de Probabilidade Conjunta: Exemplo

Uma fábrica de doces distribuiu caixas de chocolates com mistura de creme, toffees e amêndoas, envolta em chocolate branco e marrom. Para uma caixa selecionada ao acaso, seja x e y, respectivamente, a proporção de chocolate branco e marrom existente no creme e suponha que f.d.p. conjunta é:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

A função f(x,y) é uma fdp conjunta?

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Função Densidade de Probabilidade Conjunta: Exemplo

A função f(x,y) é uma fdp conjunta?

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy$$

$\Rightarrow$ integra em relação a "x"; depois em relação a "y".

$$=\frac{2}{5}\int_0^1\left(\int_0^1 2x\,dx+\int_0^1 3y\,dx\right)dy$$

$$=\frac{2}{5}\int_0^1\left(2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+3yx\Big|_0^1\right)dy$$

$$=\frac{2}{5}\int_0^1(1+3y)\,dy$$

$$=\frac{2}{5}\left[\int_0^1 dy+\int_0^1 3y\,dy\right]$$

$$=\frac{2}{5}\left[y\Big|_0^1+\frac{3y^2}{2}\Big|_0^1\right]$$

$$=\frac{2}{5}\left[1+\frac{3}{2}\right]=\frac{2}{5}\left[\frac{2+3}{2}\right]=1 \quad \text{c.q.d!}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Funções Densidade de Probabilidade Marginais

$$g(x) = \sum_{y} f(x,y) \quad \text{e} \quad h(y) = \sum_{x} f(x,y) \qquad \text{variável discreta}$$

$$\boxed{g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad \text{e} \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx} \qquad \text{variável contínua}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Funções Densidade de Probabilidade Marginais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a fdp marginal de X definida por g(x):

$$f(x,y) = x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Por definição a distribuição de probabilidade marginal de x é dada por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dy = \frac{2}{5}\left[2xy\Big|_0^1 + \frac{3y^2}{2}\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{2}{5}\left[2x+\frac{3}{2}\right] = \frac{4x}{5}+\frac{3}{5}$$

$$\therefore g(x) = \frac{4x+3}{5}$$

ou seja:

$$\therefore g(x) \begin{cases} \frac{4x+3}{5} & 0 \le x \le 1 \\ 0 \end{cases}$$

Funções Densidade de Probabilidade Marginais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a fdp marginal de Y definida por h(y):

$$f(x,y) = x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 (2x+3y)dx$$

$$= \frac{2}{5}\left[\frac{2x^2}{2}\Big|_0^1 + 3yx\Big|_0^1\right] = \frac{2}{5}[1+3y]$$

$$= \frac{2+6y}{5}$$

ou seja:

$$h(y)\begin{cases} \frac{2+6y}{5} & p/\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \end{cases}$$

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais

Sabemos que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \; P(A) > 0$$

Definindo:

A → o evento onde X = x

B → o evento onde Y = y

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad e \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \quad \text{variável contínua}$$

Temos que:

$$P(Y = y / X = x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$$

ou ainda

$$P(X = x / Y = y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta f(x,y) = $10xy^2$ $0 < x < y < 1$
a) Determine as fdp´s marginais de X e Y definidas por g(x) e h(y), respetivamente.
b) Determine a função densidade condicional de Y|X.
c) Calcule P(Y > 0,5 | X = 0,25)

a)

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{x}^{1} 10xy^2 dy$$

$$= \frac{10xy^3}{3}\Big|_x^1 = \frac{10x}{3}\left(1 - x^3\right) = \frac{10x - 10x^4}{3}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{10x}{3}\Big|_x^1 = \frac{10x}{3}\left(1 - x^3\right), \qquad 0 < x < 1}$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{x=0}^{x=y} 10xy^2 dx = \frac{10y^2.x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=y}$$

$$= 5y^2\left(y^2 - 0\right) = 5y^4$$

$$\boxed{h(y) = 5y^4 \quad , \qquad 0 < y < 1}$$

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta f(x,y) = 10xy² $0 < x < y < 1$
a) Determine as fdp´s marginais de X e Y definidas por g(x) e h(y), respetivamente.
b) Determine a função densidade condicional de Y|X.
c) Calcule P(Y > 0,5 | X = 0,25)

b)

f(y/x)

por definição $f(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{g(x)} = \dfrac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)}$

$$= \frac{3.10xy^2}{10x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{(1-x^3)} \quad , \qquad 0 < x < y < 1$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta f(x,y) = 10xy² $0 < x < y < 1$
a) Determine as fdp´s marginais de X e Y definidas por g(x) e h(y), respetivamente.
b) Determine a função densidade condicional de Y|X.
c) Calcule P(Y > 0,5 | X = 0,25)

c)

$$P\left(y > \frac{1}{2} \middle| x = 0{,}25\right)$$

Por definição:

$$P(a < y < b / X = x) = \int_a^b f(y/x).dy$$

f(y/x)

$$\text{por definição } f(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)}$$

$$= \frac{3.10xy^2}{10x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{(1-x^3)} \quad , \quad 0 < x < y < 1$$

$$P(a < y < b / X = x) = \int_a^b f(y/x).dy$$

$$= \int_{1/2}^{1} \frac{3y^2}{(1-x^3)}dy = \frac{3}{(1-0{,}25^3)}\int_{1/2}^{1} y^2 dy = \frac{3}{(1-0{,}25^3)}\frac{y^3}{3}\Bigg|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{(1-0{,}25^3)}\left(1-\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1-1/8}{1-1/64}\right) = \frac{\frac{8-1}{8}}{\frac{64-1}{64}} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{63}{64}} = \frac{7}{8}\cdot\frac{64}{63} = \frac{53}{63} = \frac{8}{9}$$

Função de Distribuição Conjunta

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

Distribuições Conjuntas de Probabilidade | Resumos LEIC-A

Funções de Distribuição Marginais

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du \qquad F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)\, du$$

Distribuições Conjuntas de Probabilidade | Resumos LEIC-A

Obrigada!

Questões?